16.6.2026

<u>עבודת קיץ למסיימי כיתה י'</u>

תלמידים יקרים,

ענו על השאלות הבאות בצורה מפורטת וברורה. מומלץ לענות בכל פעם על שאלות משני נושאים שונים במקביל ולא לענות נושא אחר נושא.

- עליכם להגיש את העבודה בשיעור מתמטיקה הראשון בכיתה י"א.
- יש להקפיד לפרט את כל דרך הפתרון <u>בכתב קריא וברור</u>, ולהגיש את התרגילים **מסודרים על פי סדר העבודה.**
- במבחן הראשון בכיתה י"א תהיה שאלה מהעבודה .
- יש להגיש את העבודה בקלסר חצי שקוף / בדפדפת גדולה, ללא שמרדפים.

עבודה פורייה וחופש נעים מצוות המתמטיקה.

שם התלמיד/ה: _______________ כיתת אם: ______ מורה בכיתה י': __________

חשבון דיפרנציאלי

1. הישר $x=-1$ הוא אסימפטוטה לפונקציה $y=\frac{ax+16}{x^2-3x-b}$. בנקודה $x=2$ לפונקציה יש נקודת קיצון.
   א. מצא את a ואת b .
   ב. מצא: תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, אסימפטוטות מקבילות לצירים, נקודות קיצון, תחומי עליה וירידה.
   ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
   ד. דרך כל אחת משתי נקודות הקיצון של הפונקציה מעבירים משיק וישר המאונך למשיק. ארבעת הישרים הנ"ל יוצרים מרובע. חשב את שטח המרובע.

2. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{3x^3+12-x^2}{x^3}-3$.
   א. עבור גרף הפונקציה $f(x)$ מצא את:
      1. תחום ההגדרה.
      2. נקודות הקיצון ואת סוגן.
      3. נקודות החיתוך עם הצירים.
      4. תחומי העליה והירידה.
      5. האסימפטוטות.
   ב. שרטט את גרף הפונקציה $f(x)$.
   ג. מצא עבור אילו ערכי k יהיו לישר $y=k$ שתי נקודות חיתוך עם הפונקציה.

3. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x^2-a^2}{x-10}$. המרחק בין שתי נקודות החיתוך שלה עם ציר ה-x הוא 12 יח'.
   א. עבור גרף הפונקציה $f(x)$ מצא את:
      1. ערכו של a $(0<a)$ ותחום ההגדרה.
      2. נקודות הקיצון ואת סוגן.
      3. נקודות החיתוך עם הצירים.
      4. תחומי העליה והירידה.
      5. האסימפטוטה.
   ב. שרטט את גרף הפונקציה $f(x)$.
   ג. דרך נקודות הקיצון של גרף הפונקציה $f(x)$ עוברים שני ישרים המקבילים לציר ה-y. שני ישרים אלו יוצרים ריבוע עם ציר ה-x והישר $y=p^2$. מצא את ערכיו האפשריים של הפרמטר p.

4. שתיים מהאסימפטוטות של הפונקציה: $f(x)=a+\frac{2x^2-x-62}{b-x^2}$ נחתכות בנקודה $(6,0)$.

א. עבור גרף הפונקציה $f(x)$ מצא את:

1. ערכם של a ו-b ותחום ההגדרה.
2. נקודות הקיצון ואת סוגן.
3. נקודות החיתוך עם הצירים.
4. תחומי העליה והירידה.
5. האסימפטוטות.

5. נקודת הקיצון של גרף הפונקציה: $f(x)=\frac{ax^2-4a}{x^2-1}$ נמצאת על הישר $y=4$.

ת סוגן.

א. עבור גרף הפונקציה $f(x)$ מצא את:

1. הפרמטר a ותחום ההגדרה.
2. נקודת הקיצון ואת סוגה.
3. נקודות החיתוך עם הצירים.
4. תחומי העליה והירידה.
5. האסימפטוטות.

ב. שרטט את גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. מצא באילו תחומים מתקיים: $f'(x)\cdot f(x)>0$.

6. אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה: $f(x)=b+\frac{x^2+a}{x^2+x-2}$ נמצאת בראשית הצירים.

א. עבור גרף הפונקציה $f(x)$ מצא את:

1. הפרמטרים a ו-b ותחום ההגדרה.
2. נקודות הקיצון ואת סוגן.
3. נקודת החיתוך עם הצירים.
4. תחומי העליה והירידה.
5. האסימפטוטות.

ב. שרטט את גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. הגדירו פונקציה חדשה: $g(x)=f(x)+p$. מצא את ערכו של הפרמטר p שעבורו תהיה לגרף הפונקציה $g(x)$ נקודת השקה אחת ויחידה לציר ה-x.

7. המכנה של הפונקציה: $f(x)=\frac{8bx}{x^2-px+p}$ $(0<p)$ מתאפס עבור ערך x יחיד.

א. מצא את ערכו של הפרמטר p.

ב. נקודת הקיצון היחידה של גרף $f(x)$ נמצאת ברביע השלישי ומרחקה מראשית הצירים הוא $\sqrt{5}$ יחי' אורך. מצא את ערכו של הפרמטר b.

ג. עבור גרף הפונקציה $f(x)$ מצא את:

1. נקודת החיתוך עם הצירים.
2. נקודת הקיצון ואת סוגה.
3. תחומי העליה והירידה.
4. האסימפטוטות.

ד. שרטט את גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. הגדירו פונקציה חדשה: $g(x)=f(x)\cdot f'(x)$. שרטט את גרף הפונקציה $g(x)$.

8. הישר $y=2$ הוא אסימפטוטה של הפונקציה $f(x)=a+\frac{4x-15}{(x-4)^2}$.
א. מצא את הערך של a.
ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.
ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
ו. הפונקציה $g(x)$ המקיימת $g(x)=2f(x)+c$. נקודת המינימום של הפונקציה $g(x)$ היא $(3.5;3)$. מצא את ערך הפרמטר c.

9. נתונה הפונקציה $y=\frac{x}{x^2+2x+b^2}$ $(b>1)$.
א. הבע באמצעות b את נקודות הקיצון של הפונקציה.
ב. מצא את b אם ערך הפונקציה בנקודת המקסימום שלה הוא $\frac{1}{8}$.

10. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2+8x}{x^2+8}$.
א. מצא: (1) תחום הגדרה. (2) נקודות קיצון. (3) תחומי עלייה וירידה, (4) נקודות חיתוך עם הצירים, (5) אסימפטוטות מקבילות לצירים.
ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
ג. הפונקציה $f(x)$ היא **נגזרת** של פונקציה אחרת $g(x)$, כלומר $g'(x)=f(x)$. בהנחה שתחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$ זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$:
(1) מצא את שיעורי ה- x של הנקודות שבהן לפונקציה $g(x)$ יש נקודות קיצון וקבע את סוג הקיצון.
(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.
(3) הסבר מדוע לפונקציה $g(x)$ אין אסימפטוטה אופקית.

11. נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{-x^2+8x-15}$.
א. עבור גרף הפונקציה $f(x)$ מצא את:
1. תחום ההגדרה.
2. נקודות הקיצון ואת סוגן.
3. נקודות החיתוך עם הצירים.
4. תחומי העליה והירידה.
ב. שרטט את גרף הפונקציה $f(x)$.
ג. מצא באילו תחומים מתקיים: $f'(x)\cdot f(x)<0$.

12. לפונקציה $f(x)=x^2\cdot\sqrt{m-2x}$ יש נקודת קיצון פנימית הנמצאת על הישר $y=128$.

א. עבור גרף הפונקציה $f(x)$ מצא את:

1. ערכו של m ואת תחום ההגדרה.
2. נקודות הקיצון ואת סוגן.
3. נקודות החיתוך עם הצירים.
4. תחומי העליה והירידה.

ב. שרטט את גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. מצא כמה פתרונות יש למשוואה: $f'(x)=f(x)$, מבלי לפתור ישירות את המשוואה.

13. לפונקציה: $f(x)=x\cdot\sqrt{3bx-3x^2}$ $(0<b)$ יש נקודת קיצון פנימית ששיעור ה-y שלה הוא 9.

א. עבור גרף הפונקציה $f(x)$ מצא את:

1. ערכו של b ותחום ההגדרה.
2. נקודות הקיצון ואת סוגן.
3. נקודות החיתוך עם הצירים.
4. תחומי העליה והירידה.

ב. שרטט את גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. הגדירו פונקציה חדשה: $g(x)=\sqrt{f(x)}$. ישר המקביל לציר ה-x משיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה A וחותך את ציר ה-y בנקודה B. ראשית הצירים בנקודה O. חשב את שטח המשולש ΔABO .

14. נתונה פונקציה: $f(x)=x+\sqrt{18-x^2}$.

א. קבע האם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית, אי זוגית, או שאינה זוגית ואינה אי זוגית.

ב. עבור גרף הפונקציה $f(x)$ מצא את:

1. תחום ההגדרה.
2. נקודות הקיצון ואת סוגן.
3. נקודות החיתוך עם הצירים.
4. תחומי העליה והירידה.

ג. שרטט את גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. מצא באמצעות הגרף ששרטטת, כמה פתרונות יש למשוואה: $f(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

15. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x-2}{x^2-4x+5}$.

א. מצא: (1) תחום הגדרה. (2) נקודות קיצון. (3) תחומי עלייה וירידה.
(4) נקודות חיתוך עם הצירים. (5) אסימפטוטות מקבילות לצירים.

ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x)=\sqrt{f(x)}$.
שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

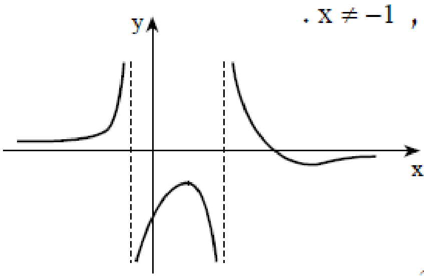
16. נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{x^2-6x+m}$.

א. מצא לאילו ערכים של m הפונקציה מוגדרת לכל ערך של x .

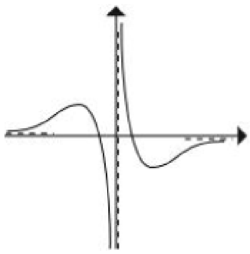
ב. מצא את m אם ידוע שלישר $y=2$ יש נקודה אחת משותפת עם גרף הפונקציה $f(x)$.

פתרונות – חשבון דיפרנציאלי

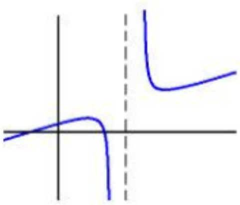
1. א. $a=-2$, $b=4$. ב. תחום הגדרה: $x\neq 4$, $x\neq -1$.
נקודות חיתוך: $(0;-4)$, $(8;0)$.
אסימפטוטות: $x=-1$, $x=4$, $y=0$.
נקודות קיצון: $(2;-2)$ מקסימום,
$(14;-0.08)$ מינימום.
עלייה: $x>14$ או $-1<x<2$ או $x<-1$.
ירידה: $4<x<14$ או $2<x<4$. ד. 23.04 .



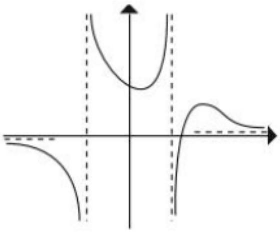
2. א. 1) $x\neq 0$. 2) $Min\left(6,-\frac{1}{9}\right)$, $Max\left(-6,\frac{1}{9}\right)$. 3) $(-3.46,0),(3.46,0)$.
4) עולה: $6<x$ או $x<-6$; יורדת: $0<x<6$ או $-6<x<0$.
5) $y=0$, $x=0$. ב. השרטוט משמאל. ג. $k=0,-\frac{1}{9},\frac{1}{9}$.



3. א. 1) $a=6$, תחום ההגדרה: $x\neq 10$. 2) $Max(2,4), Min(18,36)$.
3) (6, 0), (0, 3.6), (-6, 0). 4) עולה: $18<x$ או $x<2$;
יורדת $2<x<10$ או $10<x<18$. 5) $x=10$. ב. השרטוט משמאל.
ג. $p=\pm 4$.

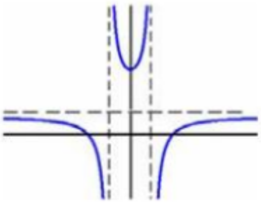


.4



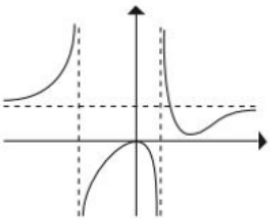
א. 1) $a=2$, $b=36$, תחום ההגדרה: $x\neq\pm6$. 2) $Max(18,0.02)$, $Min(2,0.25)$.
3) (10,0), (0,0.27). 4) עולה: $6<x<18$ או $2<x<6$;
יורדת: $x>18$ או $-6<x<2$ או $x<-6$. 5) $y=0$, $x=6$, $x=-6$.
ב. השרטוט משמאל. ג. $Max(18,0.02)$, $Min(10,0)$, $Min(2,0.25)$.

.5



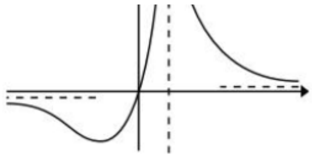
א. 1) $a=1$, תחום ההגדרה: $x\neq\pm1$. 2) $Min(0,4)$. 3) (0,4), (2,0), (-2,0).
4) עולה: $1<x$ או $0<x<1$; יורדת: $-1<x<0$ או $x<-1$.
5) $x=-1, x=1, y=1$. ב. השרטוט משמאל.
ג. $2<x$ או $0<x<1$ או $-2<x<-1$.

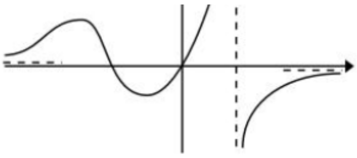
.6



א. 1) $a=0$, $b=0$, תחום ההגדרה: $x\neq-2,1$. 2) $Min(4,0.88)$, $Max(0,0)$.
3) (0,0). 4) עולה: $4<x$ או $-2<x<0$ או $x<-2$; יורדת: $1<x<4$ או
$0<x<1$. 5) $x=-2, x=1, y=1$. ב. השרטוט משמאל. ג. $p=0,-0.88$.

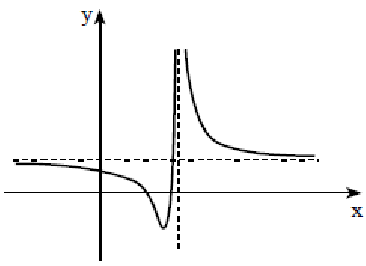
.7





.8

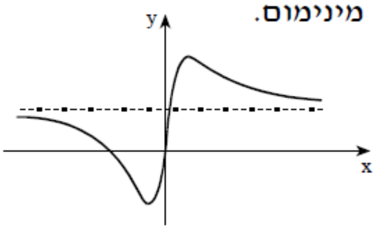
א. 2 . ב. $x\neq4$.
ג. $(3.5;-2)$ מינימום.
ד. $(0;1\frac{1}{16})$, $(3.71;0)$, $(2.29;0)$.
ו. 7 .



.9

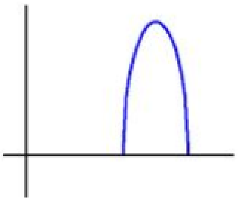
א. $(b;\frac{1}{2b+2})$ מקסימום, $(-b;\frac{-1}{2b-2})$ מינימום. ב. 3 .

10.



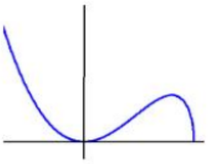
א. (1) כל x. (2) $(4;2)$ מקסימום, $(-2;-1)$ מינימום.
(3) עלייה: $-2<x<4$;
ירידה: $x>4$ או $x<-2$.
(4) $(0;0)$, $(-8;0)$. (5) $y=1$.
ג. (1) $x=0$ מינימום, $x=-8$ מקסימום.
(2) עלייה: $x>0$ או $x<-8$;
ירידה: $-8<x<0$.

11.



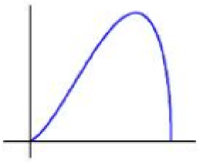
א. 1) $3\le x\le 5$. 2) פנימית: Max (4, 1), קצה: Min (5, 0), Min (3, 0). 3) (5, 0), (3, 0).
4) עולה: $3<x<4$; יורדת: $4<x<5$. ב. השרטוט משמאל. ג. $4<x<5$.

12.



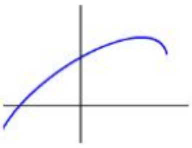
א. 1) $m=20$, תחום ההגדרה: $x\le 10$. 2) פנימית: $Max(8,128)$, $Min(0,0)$.
קצה: $Min(10,0)$. 3) (10,0), (0,0). 4) עולה: $0<x<8$;
יורדת: $8<x<10$ או $x<0$. ב. השרטוט משמאל. ג. שניים.

13.



א. 1) $b=4$, תחום ההגדרה: $0\le x\le 4$. 2) פנימית: $Max(3,9)$.
קצה: $Min(4,0)$, $Min(0,0)$. 3) $(4,0)$, $(0,0)$. 4) עולה: $0<x<3$; יורדת: $3<x<4$.
ב. השרטוט משמאל. ג. 4.5 יח"ר.

14.



א. אינה זוגית ואינה אי זוגית. ב. 1) $-4.24\le x\le 4.24$. 2) פנימית: $Max(3,6)$,
קצה: $Min(4.24,4.24)$, $Min(-4.24,-4.24)$. 3) $(0,4.24)$, (-3, 0).
4) עולה: $-4.24<x<3$; יורדת: $3<x<4.24$. ג. השרטוט משמאל. ד. שניים.

.15

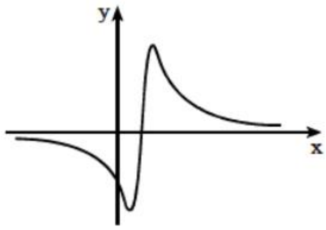
א. **(1)** כל x .

(2) $(1;-\frac{1}{2})$ מינימום, $(3;\frac{1}{2})$ מקסימום.

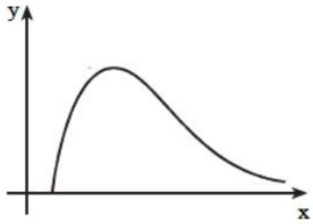
(3) עלייה : $1 < x < 3$,

ירידה : $x > 3$ או $x < 1$.

(4) $(0;-0.4)$, $(2;0)$. **(5)** $y = 0$.



ג.



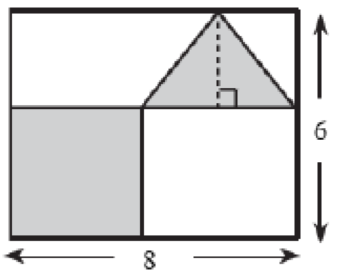
.16

א. $m \geq 9$. **ב.** $m = 13$. **39.** $a < 0$, מקסימום.

בעיות קיצון

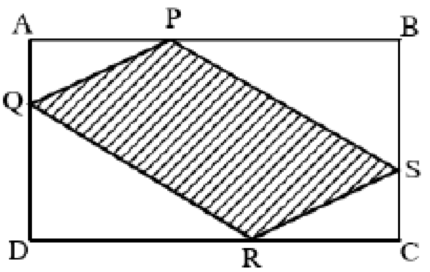
חותכים חוט שאורכו 80 ס״מ לשני חלקים. מכל אחד מהחלקים מכינים ריבוע. מה צריך להיות אורך כל אחד מהחלקים, כדי שסכום השטחים של שני הריבועים יהיה מינימלי?

תשובה: 40 ס״מ, 40 ס״מ.



בתוך מלבן שאורכו 8 ס״מ ורוחבו 6 ס״מ חסומים ריבוע ומשולש אפורים.
מה צריך להיות אורך צלע הריבוע כדי שהשטח האפור יהיה מינימלי?

תשובה: $2\frac{1}{3}$ ס״מ.



נתון מלבן ABCD שממדיו: 32 ס״מ $= AB$ ו- 24 ס״מ $= AD$. על צלעות המלבן מקצים קטעים: $AP = CR = 2x$, $CS = AQ = x$.
מצא את שטחה המקסימלי של המקבילית PQRS.

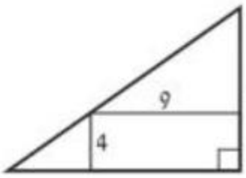
תשובה: 400 סמ״ר.

השטח של טרפז ישר זוית הוא 50 סמ״ר. השוק הארוכה היא 12 ס״מ.

א. מצא את ההיקף המינימלי של הטרפז.

ב. מצא את בסיסי הטרפז כאשר ההיקף הוא מינימלי.

א. 32 ס״מ. ב. 1.68 ס״מ, 8.32 ס״מ.



בתוך משולש ישר זווית חסום מלבן שצלעותיו הן 9 ס״מ ו-4 ס״מ.

א. חשב מה צריכים להיות ניצבי המשולש כדי ששטחו יהיה מינימלי. חשב את השטח המינימלי.

ב. חשב מה צריכים להיות ניצבי המשולש כדי שסכומם יהיה מינימלי. חשב את הסכום המינימלי.

ג. נסמן ב-$f(x)$ את הפונקציה שמייצגת את סכום הניצבים בהתאם לנתונים הנ״ל כאשר x הוא הניצב שבצד ימין של הציור. היעזר בתשובה לסעיף ב׳ וענה על הסעיפים הבאים לגבי הפונקציה $f(x)$ בתחום $x > 4$:

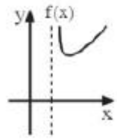
(1) מצא את האסימפטוטה האנכית של הפונקציה $f(x)$.

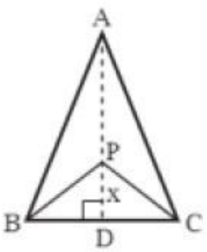
(2) מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$.

(3) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

א. 8 ס״מ, 18 ס״מ; 72 סמ״ר. ב. 10 ס״מ, 15 ס״מ; 25 ס״מ. ג. (1) $x = 4$. (2) $(10,25)$ מינימום.

ג. (3)

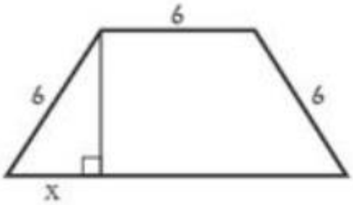




במשולש שווה שוקיים ABC שבו $AB = AC$ הגובה לבסיס BC הוא AD. נתון: $BC =$ 4 ס״מ, $AD =$ 6 ס״מ, P היא נקודה על הגובה AD.
נסמן: $DP = x$.

מה צריך להיות x כדי שהסכום $AP + BP + CP$ של מרחקי הנקודה P מקודקודי המשולש יהיה מינימלי?

$\frac{2}{\sqrt{3}}$ ס״מ.



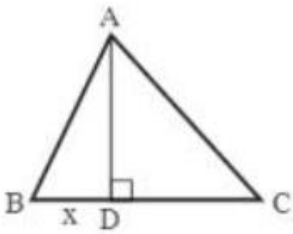
בטרפז שווה שוקיים הבסיס הקטן שווה לשוק ושניהם שווים ל-6 ס"מ. מאחד מקודקודי הבסיס הקטן מורידים גובה לבסיס הגדול.

א. חשב מה צריך להיות אורך הקטע x שבציור כדי ששטח הטרפז יהיה מקסימלי.

ב. חשב את השטח המקסימלי.

ג. ענה על סעיף א' אם הבסיס הקטן הוא 14 ס"מ וכל אחת מהשוקיים היא 6 ס"מ.

א. 3 ס"מ. ב. 46.77 סמ"ר ($27\sqrt{3}$). ג. 2 ס"מ.



AD הוא הגובה לצלע BC במשולש ABC. (הגובה עובר בתוך המשולש). הקטע DC גדול ב-4 ס"מ מהקטע BD.

נתון: $AB = 2$ ס"מ, נסמן: $BD = x$.

א. הבע באמצעות x את שטח המשולש ABC.

ב. מצא את x עבורו שטח המשולש ABC הוא הגדול ביותר.

ג. מצא את השטח הגדול ביותר של המשולש ABC.

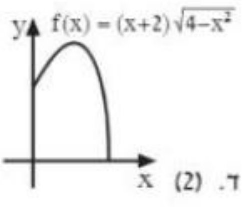
ד. נסמן ב-$f(x)$ את הביטוי שהתקבל בסעיף א'.

(1) היעזר בתשובות לסעיפים ב' ו-ג' ומצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ בתחום $0 \le x \le 2$.

(2) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום הנ"ל.

ה. $g(x)$ היא פונקציה שמקיימת $g'(x) = f(x)$ בתחום הנ"ל.

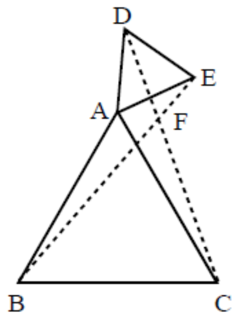
(1) מצא את תחומי העלייה והירידה של $g(x)$ (אם יש כאלה).



ד. (2)

א. $(x+2)\sqrt{4-x^2}$. ב. 1 ס"מ. ג. $3\sqrt{3}$ סמ"ר.
ד. (1) $(0,4)$ מינימום, $(1, 3\sqrt{3})$ מקסימום, $(2,0)$ מינימום. ה. (1) עולה: $0 < x < 2$.

גיאומטריה של המישור (ללא מעגל)



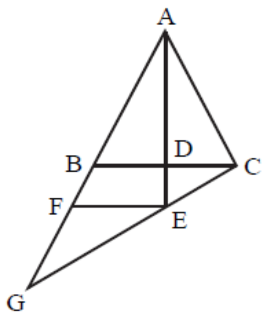
.1 המשולשים ABC ו- ADE הם משולשים שווי-צלעות. הקטעים BE ו- CD נחתכים בנקודה F.

א. הוכח: $BE = CD$.

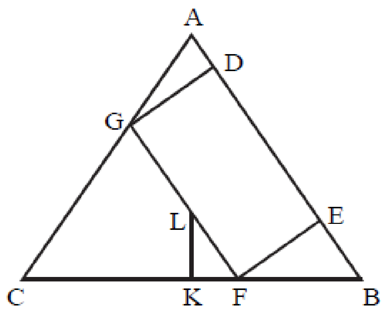
ב. הוכח: $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ABE$.

ג. חשב את הזווית BFC.

תשובה: ג. 60°.



.2 הנקודה D נמצאת על הצלע BC של משולש שווה-שוקיים ABC $(AB = AC)$.
G היא נקודה על המשך הצלע AB.
הקטע FE מקביל ל- BC.
נתון: $\frac{AG}{AC} = \frac{GF}{BF}$. הוכח: $AE \perp BC$.

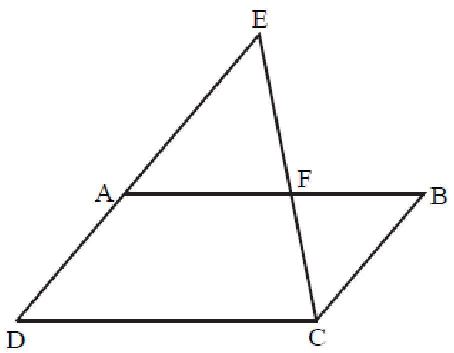


.3 במשולש שווה-שוקיים ABC $(AC = AB)$ חסום מלבן $GFED$ (ראה ציור).
נקודה L, הנמצאת על צלע המלבן GF, היא מפגש התיכונים במשולש ABC.
דרך הנקודה L העבירו אנך לצלע BC, החותך את BC בנקודה K.

א. הוכח: $\Delta KAB \sim \Delta KLF \sim EFB$.

ב. נתון: 18 ס"מ $= BC$, 15 ס"מ $= AB$.
חשב את אורכי הקטעים KF ו- EF.

תשובה: ב. 3 ס"מ, 4.8 ס"מ.



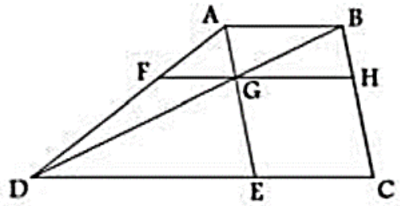
.4 המרובע $ABCD$ הוא מקבילית (ראה ציור).

א. הוכח: $\frac{AD}{AE} = \frac{BF}{FA}$.

ב. (1) הוכח: $\frac{S_{\Delta ADF}}{S_{\Delta AEF}} = \frac{AD}{AE}$

(2) היעזר בסעיף א' ובתת סעיף ב' (1),
והוכח: $S_{\Delta ADF} = S_{\Delta BEF}$.

5. בטרפז ABCD הישר FH מקביל לבסיסים. נתון: $AE\|BC$.



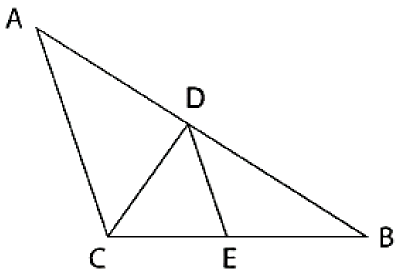
א. הוכח:

1) $BH\cdot DE=CH\cdot CE$.

2) $\frac{AB}{DE}=\frac{AF}{DF}$.

ב. מעבירים את הישרים AC ו- FE. הוכח: $FE\|AC$.

6. במשולש ΔABC הישר CD הוא חוצה הזווית $\angle ACB$. הישר DE מקביל לצלע AC.

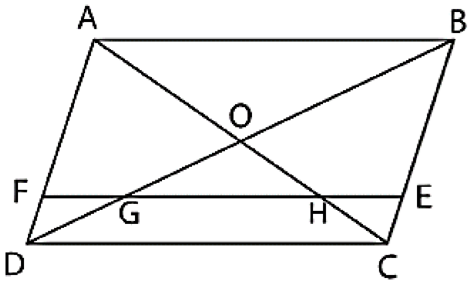


א. הוכח: $BC\cdot CE=AC\cdot BE$.

ב. נסמן: BE = m, AC = 2m. הבע באמצעות m את אורך DE.

ג. הוכח: $AB\perp CD$.

7. במקבילית ABCD ששטחה 180 סמ"ר האלכסונים נחתכים בנקודה O. נתון: AB||EF, OH=2CH.

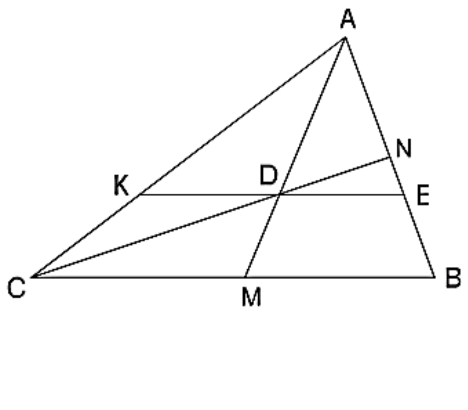


א. הוכח: אלכסוני המקבילים מחלקים אותה לארבעה משולשים ששטחם שווה.

ב. חשב את שטח:

1. המשולש ΔCDO.
2. המשולש ΔGOH.
3. הטרפז CDGH.

8. במשולש שווה השוקיים ΔABC $(AC=BC)$, הישר EK מקביל לבסיס BC ועובר דרך הנקודה D שהיא מרכז הכובד במשולש ΔABC (נקודת מפגש התיכונים AM ו-CN).

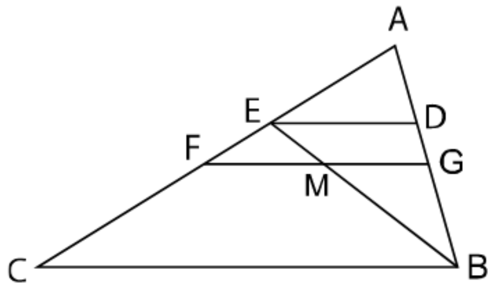


א. חשב את היחסים: 1) $\frac{AE}{BE}$. 2) $\frac{AE}{EN}$.

ב. נתון: CD = 8 ס"מ, BE = 6 ס"מ. חשב את אורך BC.

ג. חשב את שטח המשולש ΔACD.

9. במשולש ΔABC הישר FG הוא קטע אמצעים והישר DE מקביל לצלע BC. הישר BE חוצה את הזווית $\angle ABC$.

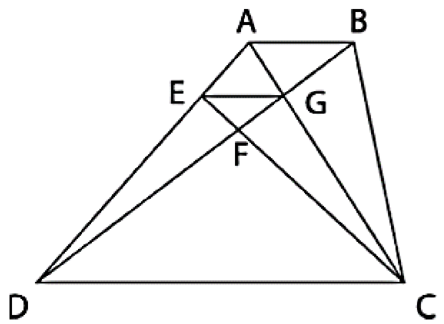


א. הוכח: $\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{BD}$.

ב. נתון: $AB=FG$. נסמן: $CF=a$.
הבע באמצעות a את אורך AE.

ג. דרך הנקודות A ו-M מעבירים ישר החותך את הצלע BC בנקודה N.
הוכח: $\angle BMN=90^0$.

10. בסיסי הטרפז ABCD מקבילים לישר EG. נתון: CD=3AB.
אלכסוני הטרפז CDEG נחתכים בנקודה F.

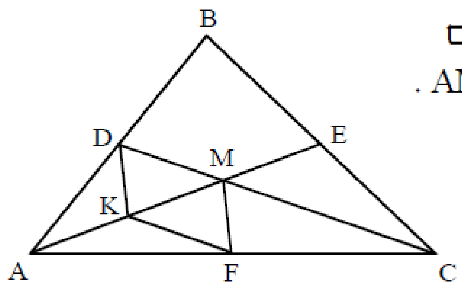


א. חשב את היחס $\frac{EF}{CF}$.

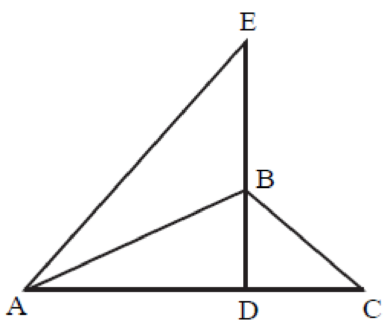
ב. נתון: BD=40 ס"מ. חשב את אורך הקטע DF.

ג. חשב את יחס השטחים: $\frac{S_{CDEG}}{S_{\Delta ABG}}$.

11. התיכונים AE ו- CD במשולש ABC נפגשים בנקודה M. נקודה K היא אמצע הקטע AM. F היא נקודה על הצלע AC כך ש- $DC \parallel KF$ (ראה ציור).
הוכח: המרובע KDMF הוא מקבילית.



12. במשולש ABC, הגובה לצלע AC הוא BD. נקודה E נמצאת על המשך הגובה BD, כך ש- AB חוצה את הזווית EAC (ראה ציור).
נתון: $\angle BCA=2\cdot\angle BAC$.



א. הוכח: $BC\cdot ED=BD\cdot EA$.

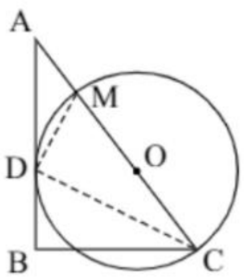
ב. היעזר בנתונים ובסעיף א',
והוכח: $BC\cdot ED=AD\cdot BE$.

פתרונות – גיאומטריה של המישור (ללא מעגל)

<u>מספר שאלה</u>	<u>תשובה</u>
.5	הוכחות
.6	ב. m
.7	ב. 1) 45 סמ״ר. 2) 20 סמ״ר. 3) 25 סמ״ר.
.8	א. 1) 2. 2) 4. ב. 15 ס״מ. ג. 36 סמ״ר.
.9	ב. $AE = \frac{2}{3}a$.
.10	א. 0.25. ב. 24 ס״מ. ג. 11.25.

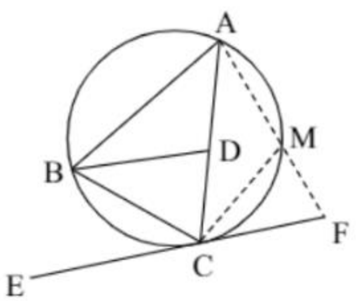
גיאומטריה של המישור עם מעגל

1. במשולש ישר הזווית ΔABC ($AB \perp BC$) הניצב AB משיק בנקודה D למעגל שמרכזו O. הקדקוד C נמצא על היקפו של אותו מעגל. היתר AC חותך את המעגל בנקודה M. נתון: 32 ס״מ = AB, ‏40 ס״מ = AC. חשב את:
   א. אורך AD.
   ב. אורך AM.
   ג. שטח המרובע BDOC.



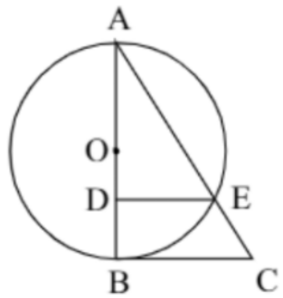
1) א. 20 ס״מ. **ב.** 10 ס״מ. **ג.** 234 סמ״ר.

3. הישר BD הוא חוצה זווית במשולש ΔABC החסום במעגל. הישר EF משיק למעגל בנקודה C. הישר AF חותך את המעגל בנקודה M.
   נסמן: $\sphericalangle CAM = \alpha$. נתון: $CM = AM$.
   א. הוכח: הישר CM חוצה את הזווית $\sphericalangle ACF$.
   ב. הוכח: $\sphericalangle CMF = 2 \cdot \sphericalangle CBD$.
   ג. נתון: הישר AC חוצה את הזווית $\sphericalangle BCF$, ‏21 ס״מ = BC ,
   12 ס״מ = CD . חשב את היקף המשולש ΔABC .



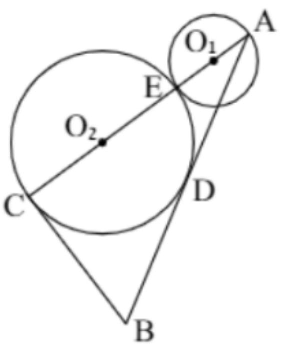
3) ג. 77 ס״מ.

4. הישר BC משיק בנקודה B למעגל שקוטרו AB ואורך רדיוסו 13 ס״מ.
הנקודה O היא מרכז המעגל. הישר AC חותך את המעגל בנקודה E.
הנקודה D נמצאת על הקוטר AB כך שמתקיים : $BC \parallel DE$.
נתון : שטח הטרפז BCED הוא 88p ושטח המשולש ΔADE הוא 81p.
חשב את :
א. אורך DO.
ב. שטח המשולש ΔAEO .



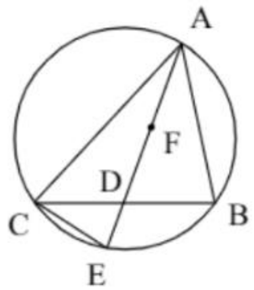
4) א. 5 ס״מ. **ב.** 78 סמ״ר.

8. מעגל שמרכזו O_1 והיקפו 6π ס״מ, משיק בנקודה E למעגל שמרכזו O_2
ושטחו 81π סמ״ר. הישרים AB ו-BC משיקים למעגל שמרכזו O_2
בנקודות D ו-C בהתאמה. הישר AC עובר דרך מרכזי המעגלים.
א. חשב את שטח המרובע $CBDO_2$.
ב. הנקודה M נמצאת על BD כך שהישר CM הוא גובה במשולש ΔABC .
הישר BO_2 חותך את הגובה CM בנקודה P.
חשב את אורך CP והוכח שהמרובע CO_2DP הוא מעוין.



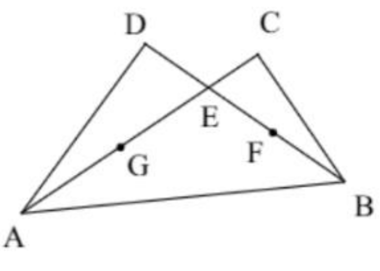
8) א. 162 סמ״ר. **ב.** 9 ס״מ.

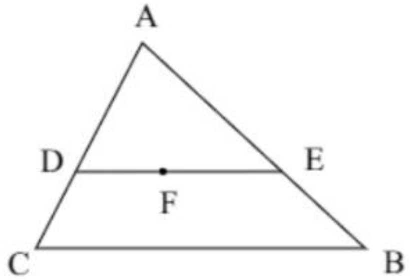
11. המשולש ΔABC חסום במעגל. הנקודה F היא אמצע התיכון AD.
המשכו של AD חותך את המעגל בנקודה E. נתון : $BC = 4DE$.
א. הוכח : המשולש ΔBCF חסום במעגל אחר, שמרכזו בנקודה D.
ב. (*) המעגל החוסם את המשולש ΔBCF , חותך בנקודה M את
המשך AE. חשב את היחס בין שטחי המשולשים : ΔABF ו- ΔCEM .



11) ב. 2.

13. המשולשים ΔABC ו- ΔABD הם ישרי זווית ובעלי יתר משותף
AB. ניצביהם נחתכים בנקודה E, כמתואר בשרטוט.
א. הוכח : הנקודות A, B, C ו-D על אותו מעגל.
ב. נתון : הנקודות F ו-G הן אמצעי הקטעים BE ו-AE בהתאמה.
הוכח : $\Delta DEG \sim \Delta CEF$.
ג. הוכח : $\Delta DCE \sim \Delta GFE$.
ד. הוכח : ניתן לחסום במעגל את המרובע CDGF.





14. המשכי שוקי הטרפז BCDE נחתכים בנקודה A. הישר DE עובר בנקודה F שהיא מרכז המעגל החסום במשולש ΔABC. נתון: $AD = 3BE$, $CD = 3a$, $DE = 5a$.

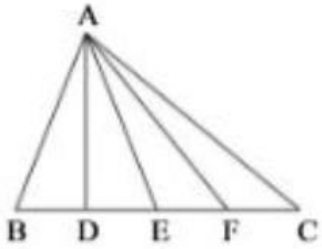
א. הבע באמצעות a את אורכי הקטעים: 1. AE. 2. BC.

ב. נתון: חוצה הזווית $\sphericalangle BAC$ חותך את הצלע BC בנקודה M.
חשב את היחס: $\frac{CM}{BM}$.

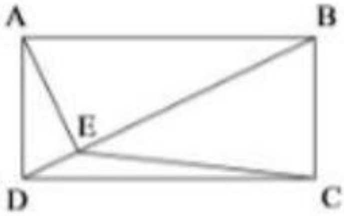
ג. חשב את היחס בין שטחי המשולשים ΔADE ו- ΔCFM.

14) א. 1) 4a. **2)** 7.5a. **ב.** 1.5. **ג.** 9:20.

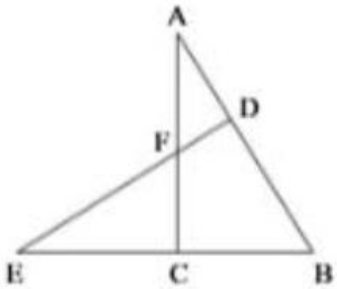
טריגונומטריה של המישור



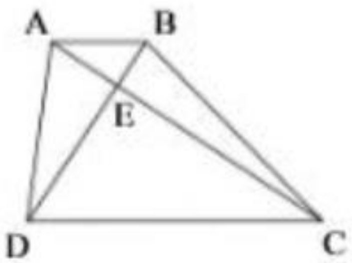
1. הקטע AD שאורכו 6 ס"מ הוא הגובה במשולש ΔABC.
נתון: $BD = DE = EF = CF$, $\sphericalangle BAD = 18^\circ$. חשבו את:
א. אורך הקטע DE.
ב. גודל הזוויות:
1. $\sphericalangle AFD$
2. $\sphericalangle CAF$



2. במלבן ABCD הקטע AE מאונך לאלכסון BD.
נתון: $BE =$ 11.08 ס"מ, $BC =$ 5 ס"מ.
שטח המשולש $\Delta ABCE$ הוא 25.57 סמ"ר. חשבו את:
א. גודל הזווית $\sphericalangle DAE$.
ב. אורך הקטע DE.
ג. שטח המשולש $\Delta ACDE$.



3. הנקודות C ו-D נמצאות בהתאמה על הקטעים BE ו-AB.
הישרים AC ו-DE נחתכים בנקודה F כך שמתקיים:
$DE \perp AB, AC \perp BE$.
נתון: $CE =$ 8 ס"מ, $AD = CF =$ 5 ס"מ.
א. חשבו את אורך הקטע DF.
ב. חשבו את שטחי המשולשים ΔBDE ו-ΔABF.
ג. (*) הנקודה K נמצאת על הקטע DF בין הנקודות D ו-F.
עבור כל טענה, קבעו אם היא נכונה או שגויה, והסבירו:
i. מכפלת הסינוסים של זוויות המשולש ΔCEK היא בהכרח חיובית.
ii. מכפלת הקוסינוסים של זוויות המשולש ΔCEK היא בהכרח שלילית.



4. אלכסוני הטרפז ABCD $(AB \parallel CD)$ מאונכים זה לזה ונחתכים בנקודה E. שטח המשולש ΔCDE הוא 24 סמ"ר. נתון: $CE =$ 8 ס"מ.
א. חשבו את אורך הבסיס CD.
ב. נתון: $\sphericalangle CDE = 2 \cdot \sphericalangle ADB$.
חשבו את היקף המשולש ΔADE.
ג. חשבו את שטח המשולש ΔBCE.

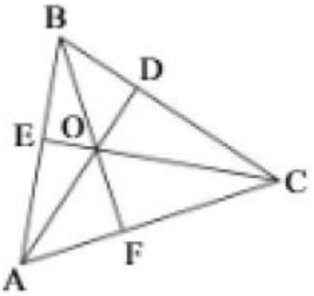
5. במשולש $\triangle ABC$ הגבהים CE, AD ו-BF נחתכים בנקודה O.

נתון: $CO =$ 9 ס"מ, $EO =$ 3 ס"מ.

שטח המשולש $\triangle ACE$ הוא 36 סמ"ר. חשבו את:

א. אורכי הקטעים AF ו-BE.

ב. היקף המשולש $\triangle ABC$.

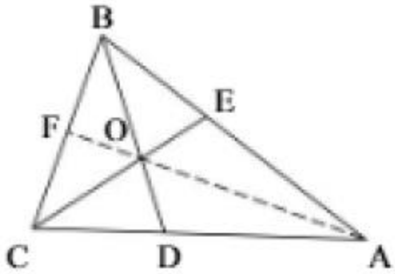


6. במשולש $\triangle ABC$ שווה השוקיים $(AB = AC)$ חוצי הזווית BD, CE ו-AF נחתכים בנקודה O. נתון: $\sphericalangle AEC = 114°$.

א. חשבו את גודל הזווית $\sphericalangle ACB$.

ב. שטח המשולש $\triangle ABC$ הוא 38 סמ"ר. חשבו את היקפו.

ג. חשבו את אורך הקטע AO.

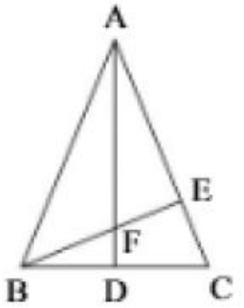


7. במשולש $\triangle ABC$ שווה השוקיים $(AB = AC)$ הגבהים AD ו-BE נחתכים בנקודה F. נתון: $AE = BE$, $AC =$ 8 ס"מ.

א. חשבו את אורכי הקטעים AE ו-AF.

ב. חשבו את שטח המשולש $\triangle BDF$.

ג. הנקודה M היא אמצע AE.
חשבו את גודל הזווית $\sphericalangle AMF$.

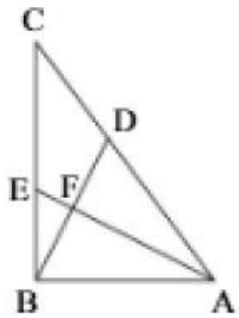


8. במשולש ישר הזווית $\triangle ABC$ הנקודות D ו-E נמצאות בהתאמה על היתר AC ועל הניצב BC. הקטע AE חוצה את הזווית $\sphericalangle BAC$.
הקטעים AE ו-BD מאונכים זה לזה ונחתכים בנקודה F.

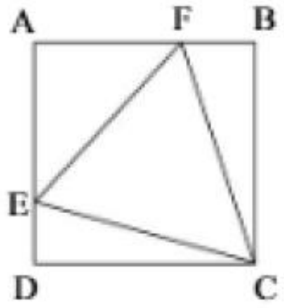
נתון: $BC = 8a$, $AC = 10a$.

א. הביעו באמצעות a את אורכי הקטעים BD ו-CD.

ב. נתון: שטח המשולש $\triangle BCD$ הוא 43 סמ"ר.
חשבו את היקף המשולש $\triangle ABC$.



9. (*) המשולש ACEF כלוא בריבוע ABCD כמתואר בשרטוט.



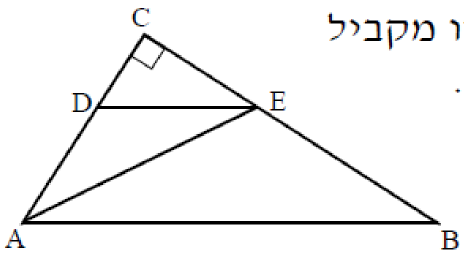
נתון: $AF = 2BF$, $\sphericalangle ECF = 56^\circ$.

א. חשבו את היחס: $\frac{AE}{DE}$.

ב. חשבו את הזווית $\sphericalangle CFE$.

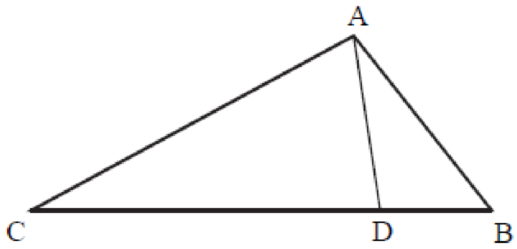
ג. נתון: שטח המשולש ACEF הוא 100 סמ"ר.
חשבו את היקף הריבוע ABCD.

10. במשולש ישר-זווית ABC $(\sphericalangle C = 90^\circ)$ העבירו מקביל ליתר, החותך את הניצבים בנקודות D ו- E .



נתון: $DE = m$, $\sphericalangle ABE = \alpha$, $\sphericalangle DAE = \alpha$.
הבע באמצעות m ו- α
את אורכי הקטעים AB ו- BE .

11. D היא נקודה על הצלע CB במשולש ABC .



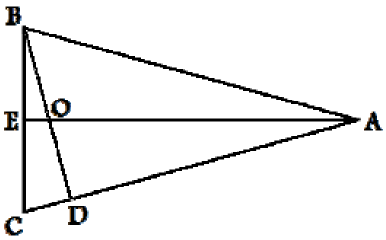
נתון: $\sphericalangle CAD = \alpha$, $\sphericalangle DAB = 20^\circ$,
$AC =$ 7 ס"מ , $AB =$ 5 ס"מ .

א. הבע באמצעות α את היחס
שבין שטח המשולש ADC
לשטח המשולש ADB .

ב. מצא את α כאשר שטחי המשולשים שווים.

ג. בעבור איזה ערך של α יחס השטחים הנ"ל הוא הגדול ביותר?

12. במשולש שווה השוקיים ΔABC ששטחו 28 סמ"ר, נתון:
AB =AC=10 ס"מ. הישר AE הוא חוצה הזווית החדה $\prec BAC$.
הישר BD הוא הגובה לשוק AC. חשב את שטח המשולש:



א. ΔADO .

ב. ΔABO .

פתרונות - טריגונומטריה של המישור

1) **א.** 1.95 ס"מ. **ב. 1.** 56.98° . **2.** 11.25° . 2) **א.** 22.62° . **ב.** 1.92 ס"מ. **ג.** 4.42 סמ"ר.

3) **א.** 3.13 ס"מ. **ב.** 49.3 סמ"ר $= S_{\Delta BDE}$, 20.08 סמ"ר $= S_{\Delta ABF}$. **ג. i.** הטענה נכונה. **ii.** הטענה נכונה.

4) **א.** 10 ס"מ. **ב.** 15.71 ס"מ. **ג.** 9 סמ"ר. 5) **א.** 5.37 ס"מ $= AF$, 6 ס"מ $= BE$. **ב.** 38.84 ס"מ.

6) **א.** 76° . **ב.** 31.6 ס"מ. **ג.** 9.94 ס"מ. 7) **א.** 5.66 ס"מ $= AE$, 6.13 ס"מ $= AF$. **ב.** 1.93 סמ"ר.

ג. 140.41° . 8) **א.** $BD = 5.37a$, $CD = 4a$. **ב.** 50.8 ס"מ. 9) **א.** 2.57. **ב.** 61.23° . **ג.** 59.52 ס"מ.

10. $\frac{m\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$, $\frac{m\cos\alpha\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha}$.

11. א. $\frac{7\sin\alpha}{5\sin 20^\circ}$. ב. 14.14° . ג. 90° .

12. א. 10.51 סמ"ר. ב. 12.65 סמ"ר.

אלגברה (משוואות ואי שיוויונות)

פתרו את המשוואות הבאות (היעזרו בפירוק לגורמים):

1. $\frac{x+5}{5x-15} - \frac{6}{x+1} = \frac{2}{x-3} - 1$ תשובה: $2\frac{1}{3}$, 5 .

2. $\frac{2x}{x^2-25} - \frac{1}{x-5} = \frac{1}{6}$ תשובה: 1

פתרו את אי-השיוויונות הבאים:

3. $\frac{x^2-7x+10}{x+1} > 0$ תשובה: $x > 5$ או $-1 < x < 2$.

4. $\frac{2x+2}{x-1} \le 6$ תשובה: $x \ge 2$ או $x < 1$.

5. $\frac{5x+2}{x+6} \ge \frac{3}{2}$ תשובה: $x \ge 2$ או $x < -6$.

6. $\frac{x^2-x+12}{x^2-3x+2} \le 4$ תשובה: $x \ge 4$ או $1 < x < 2$ או $x \le -\frac{1}{3}$.

7. $x^3+2x^2+4x > 0$ תשובה: $x > 0$

8. $2x^3 \ge 5x^2+3x$ תשובה: $x \ge 3$ או $-\frac{1}{2} \le x \le 0$.

משוואות אי-רציונליות - פתרו את המשוואות הבאות:

9. $x+\sqrt{8-x^2}=0$ תשובה: -2

10. $4x-3\sqrt{x-1}=14$ תשובה: 5

11. $\sqrt{2x+3}-\frac{x}{2\sqrt{2x+3}}=0$. תשובה: אין פתרון